



ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS DE SETOR DE ANEL CIRCULAR

THIAGO ANTONINI ALVES¹, RICARDO ALAN VERDÚ RAMOS², CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA²

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR/Campus Ponta Grossa
Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC)
Av. Monteiro Lobato, s/nº, km 04, CEP 84.016-210, Ponta Grossa/PR, Brasil

²Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)
Faculdade de Engenharia, Unesp/Ilha Solteira
Caixa Postal 31, CEP 15.385-000, Ilha Solteira/SP, Brasil

(Recibido 6 de diciembre de 2013, para publicación 28 de marzo de 2014)

Resumo – Neste trabalho foi realizada a solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos Newtonianos no interior de dutos de seção transversal com formato de setor de anel circular utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno uma Transformação Conforme foi utilizada visando transformar o domínio para um sistema de coordenadas mais apropriado. Feito isso, a TTIG foi aplicada na equação do momentum para determinação do campo de velocidade. Os resultados numéricos foram obtidos para parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de Fanning, número de Poiseuille, fator de Hagenbach e comprimento de entrada fluidodinâmico. Estes resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma ótima concordância.

Palavras-chave – Transformada integral, transformação conforme, escoamento laminar, setor de anel circular.

1. INTRODUÇÃO

O escoamento interno de fluidos em dutos representa uma classe de problemas de natureza difusiva elíptica de grande interesse na Engenharia Mecânica devido ao fato de estar presente em equipamentos de grande aplicação residencial, comercial e industrial. Diante deste cenário, os dutos de seção circular são amplamente utilizados pela sua simplicidade construtiva e pela facilidade de sua aplicação durante a concepção de um projeto de um determinado equipamento. Desta forma, inúmeros trabalhos e investigações relacionados a esta classe de problemas já foram realizados e uma vasta documentação é encontrada na literatura [1-3]. Por sua vez, o escoamento de fluidos em dutos que apresentam seção transversal de geometria não-convencional encontra aplicações mais restritas, porém, do ponto de vista analítico-numérico, estes problemas sempre despertam grande atenção, devido a sua maior complexidade, a busca de soluções fomenta o desenvolvimento de novas metodologias e a construção de novas ferramentas computacionais.

Neste contexto, o presente trabalho trata do problema fluidodinâmico relacionado ao escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos *Newtonianos* no interior de dutos de seção transversal com formato de um setor de anel circular. Geralmente, problemas com essa geometria são resolvidos através da utilização do sistema de coordenadas cilíndricas. Entretanto, para facilitar o tratamento analítico, decidiu-se pelo uso de uma Transformação Conforme conveniente com o objetivo de transformar o domínio original em um retângulo no novo sistema de coordenadas. Além de facilitar a aplicação das condições de contorno, esta transformação permite escrever a equação diferencial do *momentum* de forma mais simples. Para a obtenção do perfil de velocidade do fluido optou-se pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG [4], pois, para este caso, a equação diferencial parcial que descreve a conservação do *momentum* é transformada em um sistema de equações algébricas de fácil solução. Este

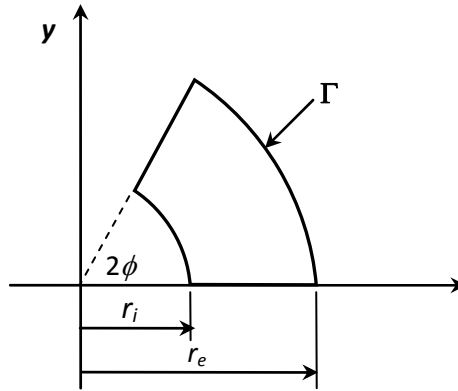


Fig. 1. Geometria original do problema.

procedimento vem permitindo a solução analítica de forma simples e elegante de problemas difusivos e difusivo-convectivos que apresentam geometrias relativamente complexas [5-6].

2. PROCEDIMENTO HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Considera-se para o presente problema o escoamento laminar de fluidos no interior de dutos cilíndricos de seção transversal com formato de um setor de anel circular (Fig. 1). Desta forma, para fluidos *Newtonianos* com propriedades constantes, a equação do *momentum* pode ser escrita como

$$\rho \frac{D\mathbf{v}(x,y,z)}{Dt} = -\nabla p(x,y,z) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{0}, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}, \quad (2)$$

sendo que, ρ representa a massa específica do fluido, μ a viscosidade dinâmica do fluido, p o campo de pressão, \mathbf{v} o campo vetorial de velocidades, Γ o contorno e Ω o domínio da geometria analisada.

Para escoamento completamente desenvolvido e em regime permanente, a equação do *momentum*, (1), se reduz a

$$\nabla^2 \mathbf{v}(x,y) - \frac{1}{\mu} \nabla p(z) = \mathbf{0}, \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x,y) = \mathbf{0}, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}, \quad (4)$$

sendo que,

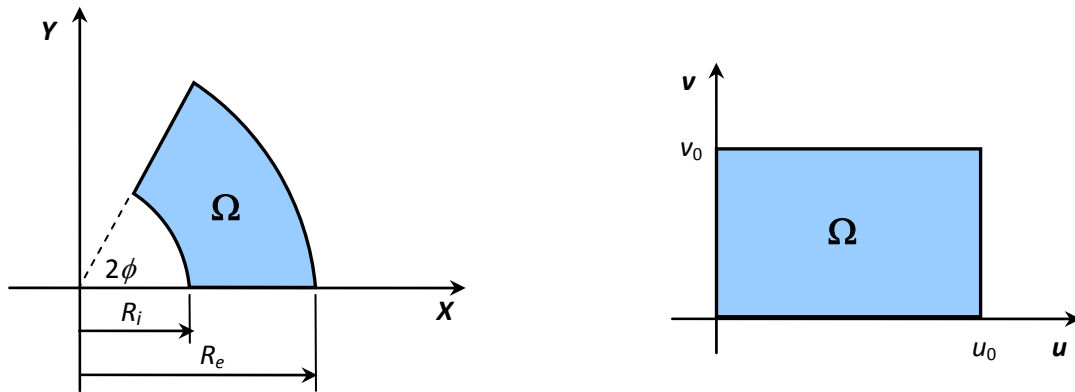
$$\mathbf{v}(x,y) = w(x,y) \mathbf{k}; \quad \nabla p(z) = \frac{dp(z)}{dz} \mathbf{k}.$$

2.1. Adimensionalização

Reescrevendo a equação do *momentum*, (3), na forma adimensional, tem-se que

$$\frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial Y^2} + 1 = 0, \quad \{(X,Y) \in \Omega\}, \quad (7)$$

$$W(X,Y) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma\}, \quad (8)$$

Fig. 2. Transformação do domínio de setor anular no plano (X,Y) para o plano (u,v) .

com,

$$X = \frac{x}{D_h}; \quad Y = \frac{y}{D_h}; \quad D_h = \frac{4A_s}{Per}, \quad (9,10,11)$$

$$W(X,Y) = \frac{w(X,Y)}{\left[\frac{D_h}{\mu} \left(-\frac{dp(z)}{dz} \right) \right]}, \quad (12)$$

sendo, D_h o diâmetro hidráulico, A_s a área da seção transversal, Per o perímetro do contorno, w a velocidade do fluido e W a velocidade adimensional. Desta maneira, a equação do *momentum*, (7), se apresenta na forma da equação de *Poisson* para o potencial $W(X,Y)$.

2.2. Transformação de Coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico do problema proposto considere a Transformação Conforme da forma como segue

$$Z = R_e e^{i\omega}, \quad (13)$$

sendo, $R_e = r_e/D_h$, $R_i = r_i/D_h$, $Z = X + iY$ e $\omega = u + iv$. Esta relação permite transformar o domínio do setor de anel circular no plano (X,Y) em um domínio retangular no plano (u,v) conforme ilustrado na Fig. 2. As relações de transformação de coordenadas são dadas por

$$X = R_e e^{-v} \cos(u), \quad (14)$$

$$Y = R_e e^{-v} \sin(u). \quad (15)$$

A transformação dada pela (13) satisfaz as condições de *Cauchy-Riemann*. Portanto, os coeficientes métricos h_u , h_v e o *Jacobiano* $J(u,v)$ da transformação são expressos por

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2} = R_e e^{-v}, \quad (16)$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = R_e^2 e^{-2v}. \quad (17)$$

Como pode ser observado, o arco externo do setor de anel é dado pela reta $v = 0$ no novo sistema de coordenadas e o arco interno pela reta $v = v_0$, com $v_0 = \ln(r_e/r_i)$. A coordenada u corresponde com a mesma definição dada para o ângulo ϕ do sistema de coordenadas cilíndricas.

Com estas novas variáveis definidas, a equação do *momentum*, transforma-se em

$$\frac{\partial^2 W(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W(u,v)}{\partial v^2} = H(u,v), \quad \{(u,v) \in \Omega\}, \quad (18)$$

$$W(u,v) = 0, \quad \{(u,v) \in \Gamma\}, \quad (19)$$

2.3. Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG

Para a obtenção da solução da equação do momentum no novo sistema de coordenadas aplica-se a TTIG sobre a (18). Para este fim, escreve-se o potencial $W(u,v)$ em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, considere, inicialmente, o seguinte problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0\}, \quad (20)$$

com,

$$\psi(0) = 0; \quad \psi(u_0) = 0 \quad (21,22)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas associados a este problema são dados, respectivamente, por

$$\mu_i = i\pi/u_0, \quad (23)$$

$$\psi_i(u) = \text{sen}(\mu_i u), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (24)$$

As autofunções acima permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa

$$\bar{W}_i(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) W(u,v) du, \quad \text{transformada}, \quad (25)$$

$$W(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{W}_i(v), \quad \text{inversa}, \quad (26)$$

sendo que, $\bar{W}_i(v)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (27)$$

com

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2} \quad (28)$$

sendo que, N_i são as integrais de normalização das autofunções $\psi_i(u)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação do *momentum* e fazendo uso das condições de contorno e das equações que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se a primeira transformação da equação diferencial,

$$A_i(v) + \mu_i^2 \bar{W}_i(v) = \frac{\partial^2 \bar{W}_i(v)}{\partial v^2}, \quad (29)$$

$$A_i(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) H(u, v) du \quad (30)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , considera-se agora o seguinte problema de autovalor,

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\}, \quad (31)$$

com

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(v_0) = 0 \quad (32,33)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas para este novo problema são dadas por

$$\lambda_j = j\pi/v_0, \quad (34)$$

$$\phi_j(v) = \text{sen}(\lambda_j v), \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (35)$$

As autofunções acima permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa

$$\tilde{W}_{ij} = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_j(v) W(u, v) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (36)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \tilde{W}_{ij}, \quad \text{inversa}, \quad (37)$$

sendo que, $Z_j(v)$ são as autofunções normalizadas e são expressas por

$$Z_j(v) = \frac{\phi_j(v)}{M_j^{1/2}}, \quad (38)$$

$$M_j = \int_0^{v_0} \phi_j^2(v) dv = \frac{v_0}{2} \quad (39)$$

sendo que, M_j são as integrais de normalização das autofunções $\phi_j(v)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_j(v)$ com a equação diferencial transformada em u e fazendo uso das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor, obtém-se a transformação integral da equação do *momentum*,

$$B_{ij} + (\mu_i^2 + \lambda_j^2) \tilde{W}_{ij} = 0 \quad (40)$$

$$B_{ij} = \int_0^{v_0} Z_j(v) A_i(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_j(v) H(u, v) du dv, \quad (41)$$

Observa-se que os parâmetros B_{ij} são integráveis e que o sistema dado pela (40) é algébrico, linear e desacoplado. Portanto, o potencial transformado pode ser obtido de forma direta,

$$\tilde{W}_{ij} = -\frac{B_{ij}}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2)}, \quad (42)$$

permitindo, assim, a obtenção da solução analítica do potencial velocidade adimensional,

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \tilde{W}_{ij} = -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (43)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado pode ser determinado numericamente quando a expansão é truncada em uma dada ordem $i = M$ e $j = N$. Portanto, utilizando-se da fórmula de inversão, determina-se o potencial velocidade adimensional é expresso por

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_i(u) Z_j(v) \tilde{W}_{ij} = -\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (44)$$

Obviamente, quanto maior M e N maior será a precisão dos resultados.

Da definição da velocidade $W(u, v)$, (12), determina-se, então, o campo de velocidade para o escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos cilíndricos de seção transversal de formato de um setor de anel circular.

2.4. Parâmetros Físicos de Interesse

2.4.1. Velocidade Adimensional

O valor médio da velocidade adimensional é expresso por

$$W_{méd} = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} W(X, Y) dA_S = \frac{4}{A_S^*} \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} W(u, v) J(u, v) du dv \quad (45)$$

sendo que, $A_S^* = A_S / D_h^2$ é a área da seção do duto adimensionalizada.

Dessa forma, a velocidade adimensional $W^*(u, v)$ definida em termos da velocidade média, pode ser determinada por

$$W^*(u, v) = \frac{w(u, v)}{w_{méd}} = \frac{W(u, v)}{W_{méd}} \quad (46)$$

Conseqüentemente, a velocidade adimensional máxima $W_{máx}^*$ definida em termos da velocidade média, é dada por

$$W_{máx}^* = \frac{w_{máx}}{w_{méd}(X, Y)} = \frac{W_{máx}}{W_{méd}(X, Y)}, \quad (47)$$

sendo que $w_{máx}$ e $W_{máx}$ são os valores máximos da velocidade e da velocidade adimensional, respectivamente.

2.4.2. Fator de Atrito de Fanning

O fator de atrito de *Fanning*, f , também conhecido como coeficiente de atrito, é definido por:

$$f = \frac{2\tau_{p, méd}}{\rho W_{méd}^2}; \quad \tau_{p, méd} = -\frac{dp}{dz} \left(\frac{A_S}{Per} \right), \quad (48,49)$$

sendo que $\tau_{p, méd}$ é a tensão de cisalhamento média na parede.

2.4.3. Número de Poiseuille

Para escoamento laminar completamente desenvolvido no interior de dutos o fator $f Re$ é igual a uma constante. Das relações de adimensionalização, obtém-se que

$$f Re = \frac{1}{2W_{méd}}, \quad (50)$$

sendo que, Re é o número de Reynolds definido em termos do diâmetro hidráulico. Esse fator $f Re$ é também conhecido como número de Poiseuille.

2.4.4. Fator de Hagenbach

O número do incremento na queda de pressão ou fator de Hagenbach, $K(\infty)$, de acordo com Lundgren et al. [7], é definido como

$$K(\infty) = \frac{2}{A_S} \int_{A_S} \left\{ \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^3 - \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^2 \right\} dA_S \quad (51)$$

ou,

$$K(\infty) = 2[K_e(\infty) - K_d(\infty)], \quad (52)$$

sendo que, $K_e(\infty)$ e $K_d(\infty)$, são respectivamente, o fator de correção de energia cinética e o fator de correção no fluxo do momentum, expressos por

$$K_e(\infty) = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^3 dA_S, \quad (53)$$

$$K_d(\infty) = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} \left[\frac{w(u,v)}{w_{méd}} \right]^2 dA_S \quad (54)$$

2.4.5. Comprimento de Entrada Fluidodinâmico

O comprimento de entrada hidrodinâmico, L_{hy} , é definido, com sendo a posição em que a velocidade máxima atinge 99% da velocidade correspondente à região fluidodinamicamente desenvolvida quando o escoamento de entrada é uniforme [8]. O comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional, L_{hy}^+ , de acordo com McComas [9] pode ser expresso por

$$L_{hy}^+ = \frac{L_{hy}}{D_h Re} = \frac{(W_{máx}^*)^2 - 1 - K(\infty)}{4 f Re} \quad (55)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a obtenção dos resultados numéricos, o Método de Quadratura de Gauss foi utilizado para o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ij} e demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do Jacobiano nos pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações algébrico, linear e desacoplado foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado fazendo uso da rotina *DIVPAG* da biblioteca *IMSL Fortran* [10] e do truncamento da expansão dada pela (44) para diversas ordens M e N .

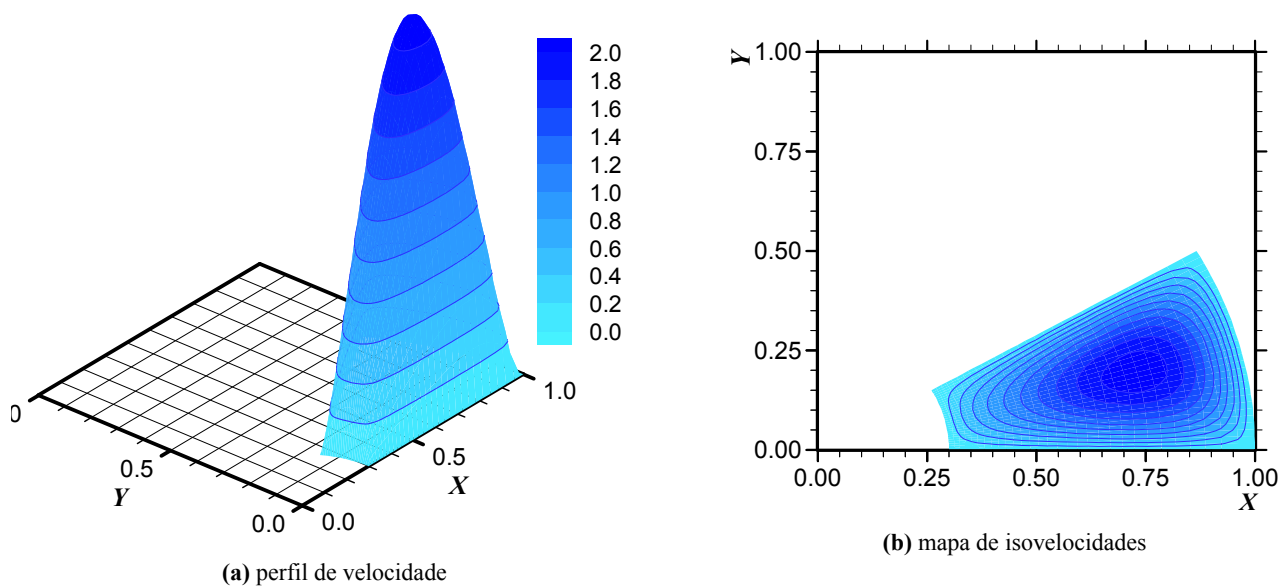


Fig. 3. Escoamento laminar em dutos de setor de anel circular com $r^* = 0,30$ e $\Theta = 30^\circ$.

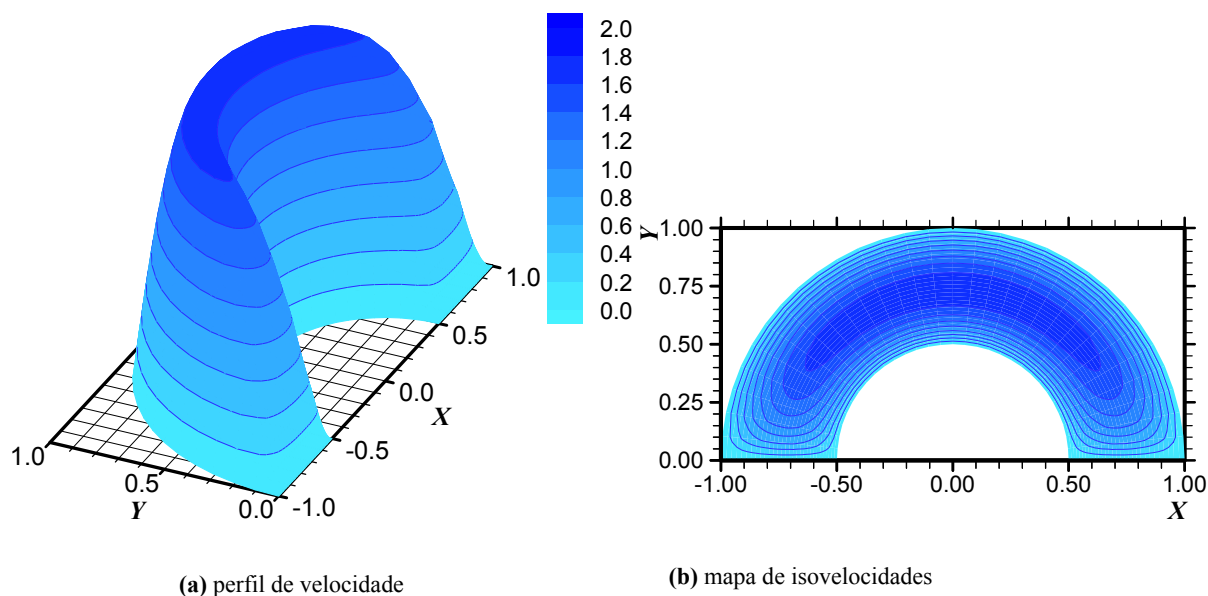


Fig. 4. Escoamento laminar em dutos de setor de anel circular com $r^* = 0,50$ e $\Theta = 180^\circ$.

Foi verificado através de uma análise de convergência que com a utilização de até 100 termos na expansão da série em cada coordenada foi possível à obtenção de três casas decimais de precisão na região de convergência mais lenta ($5^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$ e/ou $0,01 \leq r^* \leq 0,20$), enquanto que nas demais regiões obtém-se a mesma precisão com uma ordem $N = M = 75$ de truncamento na série, ou menos. O tempo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros fluidodinâmicos de interesse é pequeno, cerca de 5 a 10 segundos em um computador pessoal comum (*Intel® Core™ i7 3,6GHz* e com 16GB de memória RAM).

Nas Figs. 3, 4 e 5 são ilustrados os perfis de velocidade e os mapas de isovelocidades do escoamento considerando configurações geométricas dos dutos de setor de anel circular iguais a $r^* = 0,30$ e $\Theta = 30^\circ$, $r^* = 0,50$ e $\Theta = 180^\circ$, $r^* = 0,70$ e $\Theta = 350^\circ$, respectivamente.

Nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 são apresentados os resultados obtidos, respectivamente, para a velocidade adimensional máxima, o número de *Poiseuille*, o fator de *Hagenbach* e o comprimento de entrada fluidodinâmico considerando diversas configurações geométricas dos dutos de setor de anel circular.

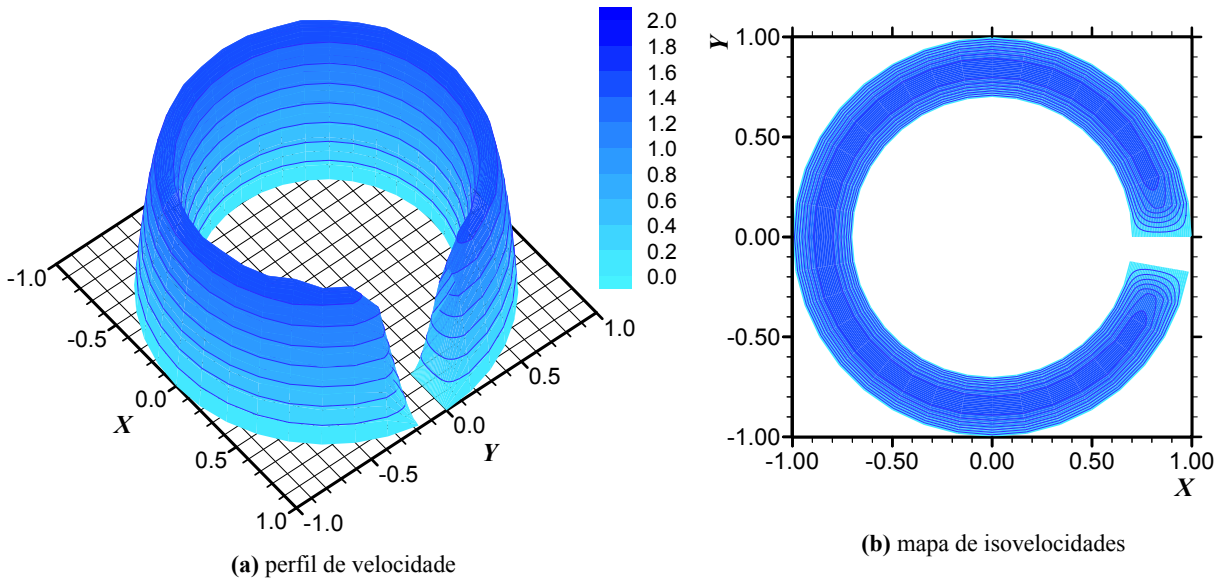


Fig. 5. Escoamento laminar em dutos de setor de anel circular com $r^* = 0,70$ e $\Theta = 350^\circ$.

Tabela 1. Velocidade adimensional máxima definida em termos da velocidade média, $W^*_{m\acute{a}x}$, em dutos de setor de anel circular em função da razão r^* e da abertura do ângulo 2ϕ

r^*	5°	15°	30°	60°	90°	180°	270°	350°
0,01	2,6842	2,4215	2,1932	2,1492	2,1023	2,0612	2,0486	2,0341
0,10	2,6391	2,4007	2,1734	2,1313	2,0919	2,0445	1,9750	1,9102
0,20	2,5634	2,3353	2,1316	2,1048	2,0833	1,9888	1,8770	1,8029
0,30	2,4531	2,2421	2,1020	2,0939	2,0672	1,9098	1,7885	1,7239
0,40	2,3123	2,1436	2,0952	2,0838	2,0254	1,8239	1,7159	1,6657
0,50	2,1672	2,0684	2,0886	2,0533	1,9534	1,7431	1,6587	1,6218
0,60	2,0332	2,0473	2,0520	1,9835	1,8562	1,6739	1,6136	1,5875
0,70	1,9388	2,0796	1,9631	1,8710	1,7480	1,6175	1,5775	1,5601
0,80	1,9477	2,0899	1,8125	1,7309	1,6482	1,5716	1,5482	1,5383
0,90	2,0583	1,9256	1,6388	1,6020	1,5671	1,5350	1,5265	1,5236
1,00	1,5000	1,5000	1,5000	1,5000	1,5000	1,5000	1,5000	1,5000

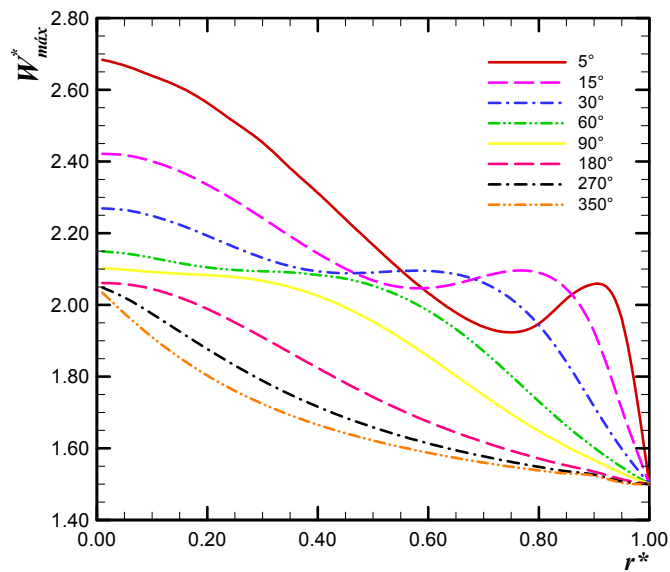


Fig. 6. Comportamento da velocidade adimensional máxima em diversos dutos de setor de anel circular.

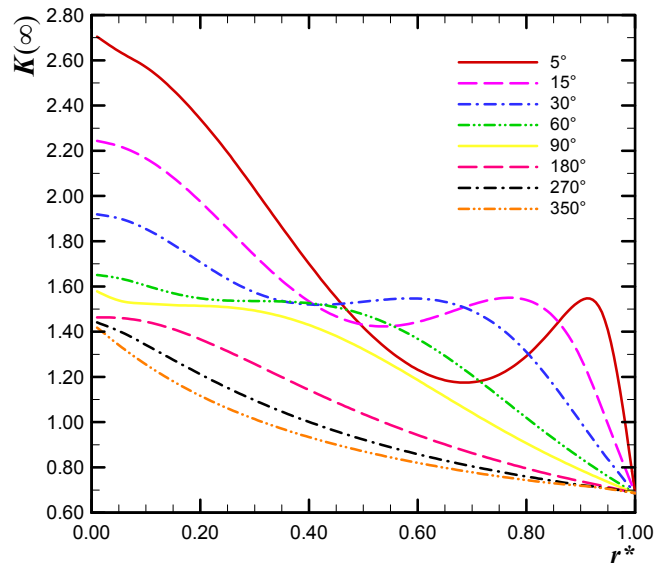


Fig. 8. Comportamento do fator de Hagenbach, $K(\infty)$, em diversos dutos de setor de anel circular.

Tabela 4. Comprimento de entrada fluidodinâmica, L_{hy}^+ , em dutos de setor de anel circular em função de r^* e de 2ϕ .

r^*	5°	15°	30°	60°	90°	180°	270°	350°
0,01	0,06983	0,05066	0,04142	0,03452	0,03111	0,02842	0,02711	0,02600
0,10	0,05882	0,04479	0,03774	0,03301	0,03127	0,02779	0,02344	0,02004
0,20	0,04955	0,03928	0,03458	0,03215	0,03107	0,02468	0,01879	0,01546
0,30	0,04206	0,03478	0,03230	0,03195	0,03002	0,02061	0,01502	0,01247
0,40	0,03535	0,03113	0,03127	0,03134	0,02732	0,01665	0,01226	0,01048
0,50	0,02979	0,02864	0,03175	0,02924	0,02315	0,01335	0,01030	0,00912
0,60	0,02513	0,02850	0,03223	0,02491	0,01825	0,01085	0,00889	0,00812
0,70	0,02191	0,03110	0,02988	0,01899	0,01361	0,00903	0,00785	0,00737
0,80	0,02288	0,03191	0,02273	0,01296	0,01001	0,00770	0,00706	0,00681
0,90	0,02962	0,02177	0,01242	0,00857	0,00757	0,00671	0,00651	0,00641
1,00	0,00588	0,00588	0,00588	0,00588	0,00588	0,00588	0,00588	0,00588

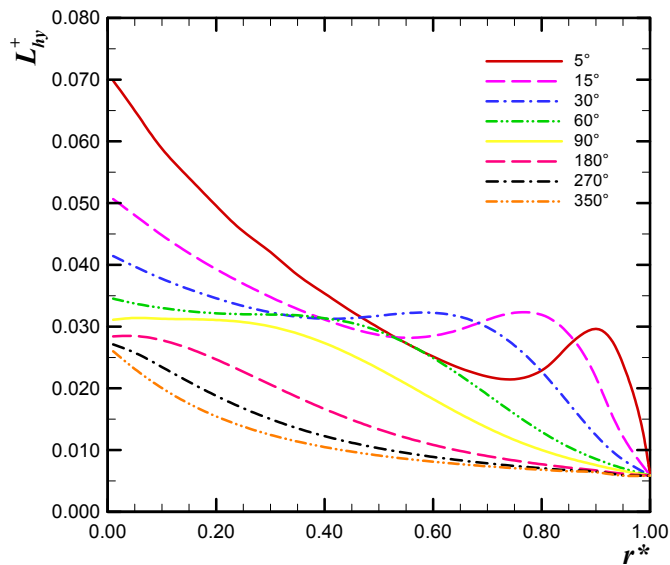


Fig. 9. Comportamento do comprimento de entrada fluidodinâmica, L_{hy}^+ , em diversos dutos de setor de anel circular.

Nas Figs. 6 a 9, os comportamentos destes parâmetros fluidodinâmicos de interesse são apresentados para ângulos de abertura iguais a 5° , 15° , 30° , 60° , 90° , 180° , 270° e 350° em função da razão $r^* = r_i/r_e$.

No caso limite de $r^* \rightarrow 0$ a geometria para qualquer ângulo de abertura se aproxima da do setor circular. Para o caso limite de $r^* \rightarrow 1$ e um ângulo qualquer de abertura, a geometria, bem como os resultados obtidos, aproximam-se do caso da placa plana.

Os resultados encontrados para o número de *Poiseuille* quando comparados com os apresentados em Sparrow *et al.* [11] e Shah & London [12] apresentaram uma excelente concordância, gerando um erro inferior a 0,5%. Destaca-se ainda, que a velocidade adimensional média apresenta o mesmo comportamento, pois ela é inversamente proporcional ao dobro do número de *Poiseuille*. A comparação entre os resultados obtidos para o fator de *Hagenbach* e os apresentados em Niida [13] e Lin *et al.* [14], também foi realizada, onde uma boa concordância entre eles foi constatada (aproximadamente 5%).

4. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi efetuada a solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos *Newtonianos* em dutos de seção transversal com formato de setor de anel circular utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG. Para o desenvolvimento analítico foi utilizado um sistema de coordenadas obtido através de uma Transformação Conforme apropriado, capaz de representar a geometria do duto em um domínio com contorno de formato retangular. Com este procedimento o novo sistema de coordenadas, além de facilitar a aplicação das condições de contorno, permitiu escrever a equação do *momentum* na forma de uma equação de *Poisson*, a qual foi resolvida através da TTIG. Como consequência, um sistema de equações algébricas infinito e desacoplado foi obtido para os potenciais transformados que foi resolvido numericamente truncando-se a expansão do potencial velocidade em um número finito de termos. Parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de *Fanning*, número de *Poiseuille*, fator de *Hagenbach* e comprimento de entrada fluidodinâmico foram calculados e comparados, quando possível com os resultados disponíveis na literatura, para dutos de diversas configurações geométricas de setor anular.

Finalmente, observa-se que a TTIG está sendo aplicada com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, ressaltando-se, aqui, o presente problema, o qual muitas vezes não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

REFERÊNCIAS

- [1] White, F., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York (1991)
- [2] Kakaç, S., Shah, R.K., Aung, W., *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, John Wiley, New York (1998)
- [3] Bejan, A., Kraus, A.D., *Heat Transfer Handbook*, John Wiley & Sons, Hoboken (2003)
- [4] Cotta, R.M., *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*, Begell House Inc., New York (1998)
- [5] Maia, C.R.M., “Solução de Problemas Difusivos e Difusivo-convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada”, Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil (2003)
- [6] Alves, T.A., “Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, Brasil (2006)
- [7] Lundgren, T.S., Sparrow, E.M., Starr, J.B., “Pressure Drop due to the Entrance Region in Ducts of Arbitrary Cross Section”, *Journal of Basic Engineering*, **86**, 620-626 (1964)
- [8] Shah, R.K., London, A.L., *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Advances in Heat Transfer, Supplement 1, Academic Press Inc., New York (1978)

- [9] McComas, S.T., “Hydrodynamic Entrance Lengths for Ducts of Arbitrary Cross Section”, *Journal of Basic Engineering*, **89**, 847-850 (1967)
- [10] IMSL Library, Edition 7, GNB Building, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036 (1994)
- [11] Sparrow, E.M., Chen, T.S., Jonsson, V.K., “Laminar Flow and Pressure Drop in Internally Finned Annular Ducts”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **7**, 583-585 (1964)
- [12] Shah, R.K., London, A.L., “Laminar Flow Forced Convection Heat Transfer and Flow Friction in Straight and Curved Ducts – A Summary of Analytical Solutions”, Mechanical Engineering Department, Stanford University, Stanford, USA (1971)
- [13] Niida, T., “Analytical Solution for the Velocity Distribution in Laminar Flow and Pressure Drop in Internally Finned Annular Ducts”, *International Chemical Engineering*, **20**, 256-265, (1980)
- [14] Lin, M.J., Wang, Q.W., Tao, W.Q., “Developing Laminar Flow and Heat Transfer in Annular-Sector Ducts”, *Heat Transfer Engineering*, **21**, 53-61 (2000)

LAMINAR FLOW INSIDE ANNULAR SECTOR DUCTS

Abstract – In this work was performed a hybrid analytical-numerical solution to hydrodynamic problem of fully developed *Newtonian* laminar flow inside annular sector ducts employing the Generalized Integral Transform Technique (GITT). In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was used to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, the GITT was applied on the momentum equation to obtain the velocity field. Numerical results were obtained for quantities of practical interest, such as maximum and minimum velocity, Fanning friction factor, Poiseuille number, Hagenbach factor and hydrodynamic entry length. These results were compared, as much as possible, with the parameter values available in the literature and they presented a great agreement.

Keywords – Integral Transform, Conformal Transform, Forced Convection, Laminar Flow, Annular Sector.